



ویژه امتحانات دی ماه ۱۴۰۴

زودبسته

بانک آزمون های تشریحی ماز

یازدهم
ریاضی

هندسه ۲





فهرست

بودجه بندی

شمارهٔ آزمون

جامع نیم سال اول

آزمون شمارهٔ ۱

فصل ۱

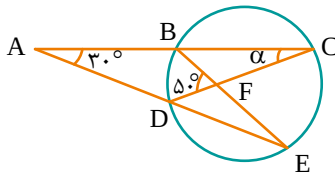
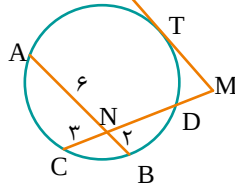
آزمون شمارهٔ ۲

جامع نیم سال اول

آزمون شمارهٔ ۳



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

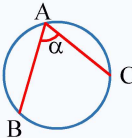
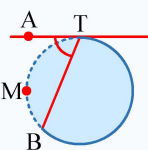
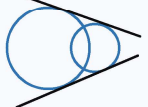
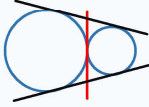
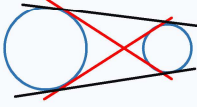
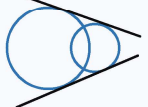
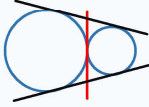
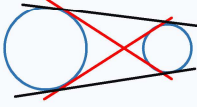
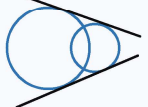
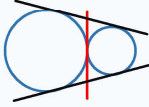
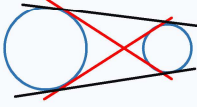
آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۲	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه یازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)	[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	
نمره	گروه آموزشی ماز		
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) به زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویه محاطی می‌گوییم. ب) دو دایره متقاطع دارای ۳ مماس مشترک می‌باشند. پ) لوزی یک چهارضلعی محیطی است. ت) در حالت کلی بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند.		
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) در دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر، قطاعی به زاویه 120° جدا کرده‌ایم. طول کمان روبه‌رو به این زاویه، برابر و مساحت قطاع برابر است. ب) اگر دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸، مماس خارج باشند، طول مماس مشترک آن‌ها برابر است. پ) یک چندضلعی را محیطی گوییم اگر و فقط اگر همه آن در یک نقطه هم‌رس باشند که این نقطه هم‌رسی، چندضلعی است. ت) در هر بازتاب، تبدیل یافته یک مثلث، یک است که با مثلث اولیه، است.		
۳	با توجه به شکل مقابل، زاویه α چند درجه است؟ 		
۴	در شکل زیر، از نقطه M در خارج دایره، مماس MT را به طول $2\sqrt{2}$ بر آن رسم کرده‌ایم. با توجه به اندازه‌های داده شده، طول پاره خط MN را به دست آورید. 		
۵	ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.		
۶	اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد، برابر ۱۵ است. طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورید.		
۷	در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار داشته باشد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.		
۲۰	موفق باشید.		



نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه یازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۵ صفحه

گروه آموزشی ماز

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره																														
۱	مصحح شو:  الف) نادرست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) درست (۰/۵) ت) نادرست (۰/۵) الف) تعریف زاویهٔ محاطی و ظلی:  زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره باشد، زاویهٔ محاطی نامیده می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه:  $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویهٔ ظلی نامیده می‌شود. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن (نقطهٔ M برای نام‌گذاری کمان‌های دایره در نظر گرفته شده است):  $\widehat{ATB} = \widehat{TMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ ب) وضعیت دو دایره نسبت به هم:  دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $OO' = d$ در نظر می‌گیریم: <table><tr><th>متداخل</th><th>مماس درون</th><th>متقاطع</th><th>مماس خارج</th><th>متخارج</th><th></th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>ندارد</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۲</td><td>۲</td><td>مماس مشترک خارجی</td></tr><tr><td>ندارد</td><td>ندارد</td><td>ندارد</td><td>۱</td><td>۲</td><td>مماس مشترک داخلی</td></tr><tr><td>$d < R - R'$</td><td>$d = R - R'$</td><td>$R - R' < d < R + R'$</td><td>$d = R + R'$</td><td>$d > R + R'$</td><td>طول خط‌المركزين</td></tr></table>	متداخل	مماس درون	متقاطع	مماس خارج	متخارج								ندارد	۱	۲	۲	۲	مماس مشترک خارجی	ندارد	ندارد	ندارد	۱	۲	مماس مشترک داخلی	$d < R - R' $	$d = R - R' $	$ R - R' < d < R + R'$	$d = R + R'$	$d > R + R'$	طول خط‌المركزين	۲
متداخل	مماس درون	متقاطع	مماس خارج	متخارج																												
																																
ندارد	۱	۲	۲	۲	مماس مشترک خارجی																											
ندارد	ندارد	ندارد	۱	۲	مماس مشترک داخلی																											
$d < R - R' $	$d = R - R' $	$ R - R' < d < R + R'$	$d = R + R'$	$d > R + R'$	طول خط‌المركزين																											

پ (جدول رو دریا ب):

مربع	مستطیل	لوزی	متوازی الاضلاع	ذوزنقه متساوی الساقین
✓	✓	×	×	✓
✓	×	✓	×	×

ت ویژگی‌های بازتاب:

- ویژگی‌های کلی بازتاب عبارتند از:
- طول پاست یعنی اندازه پاره خط را حفظ می‌کند.
 - اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
 - شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند.
 - جهت شکل را الزاماً حفظ نمی‌کند.

۲

مصممع شو:

$$\text{الف) } \frac{\frac{16\pi}{3}}{(\frac{0}{5})}, \frac{\frac{8\pi}{3}}{(\frac{0}{5})}$$

پ) نیمسازهای زاویه‌های داخلی (۰/۲۵) - مرکز دایره محاطی (۰/۲۵) ت) مثلث (۰/۲۵) - هم‌نهشت (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) می‌دانیم که شعاع دایره برابر ۴ سانتی‌متر و زاویه قطاع برابر ۱۲۰° است، پس:

$$L = \frac{\pi R}{180} \alpha \xrightarrow[R=4]{\alpha=120} L = \frac{\pi \times 4 \times 120}{180} = \frac{8\pi}{3}$$

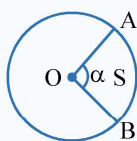
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \xrightarrow[R=4]{\alpha=120} S = \frac{\pi \times (4)^2 \times 120}{360} = \frac{16\pi}{3}$$

ب) می‌دانیم که دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ مماس خارج هستند، پس:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{4 \times 8} = 8\sqrt{2}$$

قطاع، دو دایره مماس خارجی، چند ضلعی و چهار ضلعی محیطی و محاطی:

الف) ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد:



$$L = \frac{\pi R}{180} \alpha \quad \text{طول کمان AB برابر است با:}$$

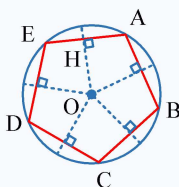
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \text{مساحت قطاع برابر است با:}$$

ب) اگر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس خارج باشند:

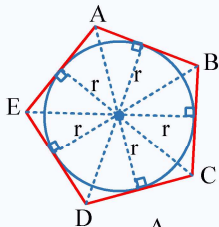
۱) طول خط‌المركزین آنها برابر است با: $R + R'$

۲) طول مماس مشترک خارجی آنها برابر است با: $2\sqrt{RR'}$

پ) یک چندضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه، هم‌رس باشند.

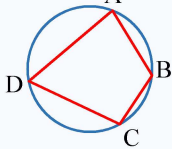


یک چندضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است.

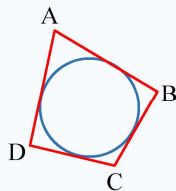


یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد.

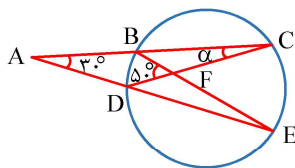


$$AB + CD = BC + AD$$

۳

مصحح شو:

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{aligned} \hat{BFD} = 50^\circ &\Rightarrow \frac{\widehat{CE} + \widehat{BD}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CE} + \widehat{BD} = 100^\circ \quad (I) \\ \hat{BAD} = 30^\circ &\Rightarrow \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CE} - \widehat{BD} = 60^\circ \quad (II) \end{aligned}$$

به کمک روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} \widehat{CE} + \widehat{BD} = 100^\circ \\ \widehat{CE} - \widehat{BD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{CE} = 80^\circ \quad (0/5) \\ \widehat{BD} = 20^\circ \quad (0/5) \end{cases}$$

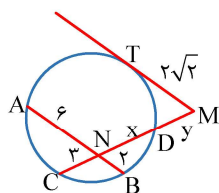
از طرفی، کمان $\widehat{BD}$ روبه‌رو به زاویه محاطی $\widehat{BCD}$ است، بنابراین:

$$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = \alpha = 10^\circ \quad (0/5)$$

چند تا زاویه مهم:

زاویه بین دو وتر	زاویه بین وتر و مماس	زاویه بین دو مماس	زاویه بین دو وتر
$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$

با توجه به روابط طولی در دایره، داریم:



$$NA \times NB = NC \times ND \quad (./\delta)$$

$$\frac{6 \times 2 = 3 \times x}{(./\delta)} \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \quad (./\delta)$$

$$\underbrace{(MT)^2 = MD \times MC}_{(./\delta)} \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = y \times (y + x + 3) \quad (./\delta)$$

از طرفی:

$$\lambda = y(y + 4 + 3) \Rightarrow \lambda = y^2 + 7y \Rightarrow y^2 + 7y - \lambda = 0 \quad (./\delta)$$

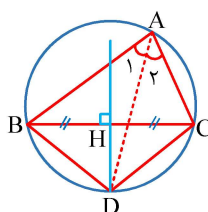
$$\underbrace{(y + \lambda)(y - 1) = 0}_{(./\delta)} \Rightarrow \begin{cases} y = -\lambda \text{ ق.ق.} (./\delta) \\ y = 1 \quad (./\delta) \end{cases}$$

$$MN = x + y = 4 + 1 = 5 \quad (./\delta)$$

در نتیجه، طول MN برابر است با:

روابط طولی در دایره:

قاطع و مماس	وترهای متقاطع
$MT^2 = MA \times MB$	$MA \times MA' = MB \times MB'$



(رسم شکل (./\delta))

با توجه به شکل مقابل، می‌دانیم که AD نیمساز زاویه A است، پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
در نتیجه کمان مقابل به این زاویه‌ها با هم برابر است. بنابراین: $\widehat{BD} = \widehat{DC}$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow[\text{محاطی } \hat{A}_1 \text{ و } \hat{A}_2]{(./\delta)} \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DC} \quad (I)$$

از طرفی، دو مثلث قائم‌الزاویه $\hat{BHD}$ و $\hat{CHD}$ بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین همنهشت هستند، پس:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H} = 90^\circ \\ BH = HC \end{cases} \Rightarrow \widehat{BHD} \cong \widehat{CHD} \xrightarrow[\text{ضلع مشترک } HD]{(./\delta)} \hat{C} = \hat{B} \xrightarrow[\text{کمان مقابل به آنها}]{(./\delta)} \widehat{DC} = \widehat{BD} \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند. (./\delta)

می‌دانیم که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ از رابطه زیر به دست می‌آید که در آن OO' همان طول خط‌المركزين است:

$$TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2} \quad (0/5)$$

$$15 = \sqrt{(OO')^2 - (14 - 6)^2} \Rightarrow 225 = (OO')^2 - 64 \Rightarrow (OO')^2 = 289$$

(0/25) (0/25)

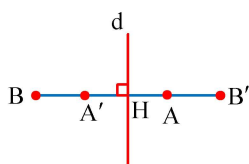
$$\Rightarrow OO' = \sqrt{289} = 17 \quad (0/5)$$

مماس مشترک داخلی و خارجی:

در دو دایره با شعاع‌های R و R' ، اگر طول خط‌المركزين برابر d باشد، داریم:

مماس مشترک خارجی	مماس مشترک داخلی
$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$	$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$

با توجه به شکل زیر، اگر A' ، بازتاب نقطه A نسبت به خط d و B' نیز بازتاب نقطه B نسبت به خط d باشد، داریم:

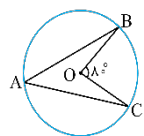
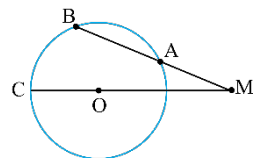
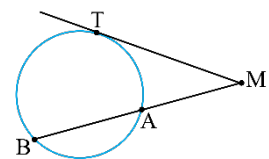
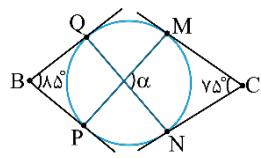
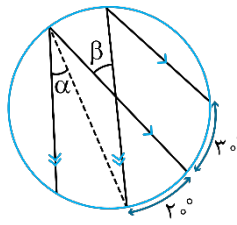


(رسم شکل ۰/۵)

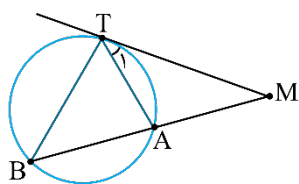
$$\underbrace{B'H = BH}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{B'A + AH = BA' + A'H}_{(0/25)} \xrightarrow{A'H=AH \quad (0/25)} B'A = BA' \quad (0/25)$$

از طرفی:

$$\begin{cases} A'B' = AA' + AB' \quad (0/25) \\ AB = AA' + A'B \quad (0/25) \end{cases} \xrightarrow{B'A=BA'} A'B' = AB \quad (0/5)$$

نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه	آزمون شبیه ساز نهایی درس: هندسه ۲	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۸/۲۵
گروه آموزشی ماز							
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد]			نمره	
۱	به سؤالات زیر، کوتاه پاسخ دهید. الف) اگر فاصله مرکز دایره $C(O, 3)$ از خط L ، ۲ واحد باشد، خط L و دایره C چه وضعیتی دارند؟ ب) زاویه محاطی روبه رو به قطر دایره چند درجه است؟ پ) دو وتر AB و CD را در دایره ای رسم کرده ایم. اگر $AB < CD$ باشد، کدام وتر به مرکز دایره نزدیک تر است؟ ت) در شکل اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟						۳
							
۲	دایره $C(O, 4)$ مفروض است. از نقطه M خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع می کند و $MA = 4$ است. اگر زاویه $M = 25^\circ$ باشد، زاویه $\hat{BOC}$ چند درجه است؟						۳
							
۳	اگر از نقطه ای مانند M خارج دایره، مماس MT و قاطع MB را رسم کنیم، ثابت کنید MT واسطه هندسی بین MA و MB است.						۲/۵
							
۴	در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه $\hat{\alpha}$ مشخص شده در شکل کدام است؟						۴/۵
							
۵	در دایره $C(O, R)$ کمان $\widehat{AB}$ برابر 60° است. اگر طول وتر AB برابر ۲۰ باشد: الف) فاصله مرکز دایره تا وتر AB را به دست آورید. ب) مساحت قطعه محصور بین وتر AB و کمان $\widehat{AB}$ را به دست آورید.						۴
۶	زاویه های α و β در شکل زیر را به دست آورید.						۳
							
۲۰	موفق باشید						

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۲	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۸/۲۵	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحات: ۴ صفحه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			
گروه آموزشی ماز			
ردیف	پاسخ‌نامه	نمره	
۱	مصحح شو:  الف) متقاطع (۰/۷۵) ب) 90° (۰/۷۵) پ) CD (۰/۷۵) ت) 40° (۰/۷۵) یادگیری بیشتر:  الف) برای بررسی وضعیت خط و دایره کافی است فاصله مرکز دایره تا خط را به دست آوریم و با شعاع مقایسه کنیم. حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد: $OH < R$ خط و دایره متقاطع‌اند. $OH = R$ خط بر دایره مماس است. خط، دایره را قطع نمی‌کند. $OH > R$ بررسی دقیق‌تر: در این سؤال $OH < R$ است و در نتیجه خط و دایره متقاطع‌اند. خط و دایره متقاطع‌اند. ب) زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است و چون زاویه محاطی روبه‌رو به قطر، روبه‌رو به کمان 180° است، اندازه آن 90° می‌باشد. پ) از دو وتر نابرابر، وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است. ت) می‌دانیم اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌رو به آن برابر است و اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است.	۳	
۲	مصحح شو:  $MA = OA \Rightarrow \hat{OAM}$ متساوی‌الساقین (۰/۵) $\Rightarrow \hat{M} = \hat{O}_1 = 25^\circ$ (۰/۵) $\hat{OAM}$ خارجی مثلث $\hat{A}_1 = \hat{M} + \hat{O}_1 = 50^\circ$ (۰/۵) $OA = OB = r \Rightarrow \hat{OAB}$ متساوی‌الساقین $OA = OB = r \Rightarrow \hat{OAB}$ $\hat{O}_2 = 180^\circ - (A_1 + B) = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ)$ (۰/۲۵) $\hat{O}_2 = 80^\circ$ (۰/۲۵) $\hat{BOC} = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = 180^\circ - (25^\circ + 80^\circ) = 75^\circ$ (۰/۵) کنیک خط اضافه!  گاهی اوقات با کشیدن خط یا خطوطی می‌توان از ویژگی‌های مهمی در شکل‌ها استفاده کرد. حواسمان باشد خطوط را به گونه‌ای رسم کنیم که از پارامترهای آن شکل استفاده کنیم. مثلاً شعاع‌های رسم شده در این دایره به ما کمک می‌کنند تا مثلث‌های OAB و OAM ایجاد شده و زاویه‌ها به هم ارتباط پیدا کنند.	۳	



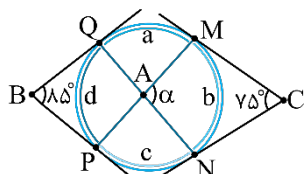
$$\begin{aligned} \widehat{MTA} \sim \widehat{MTB} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \quad (o/25) \\ \hat{T}_1 = \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \quad (o/5) \end{array} \right. \\ \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{MB} \quad (1) \\ MT^2 = MA \times MB \quad (o/5) \end{aligned}$$

از نقطه T به نقاط A و B وصل می‌کنیم:

یادگیری بیشتر:

از برخورد دو وتر دایره در داخل یا خارج دایره، روابطی بین قطعات ایجاد شده به‌وجود می‌آید که عبارتست از:

$MT^2 = MA \times MB$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$



$$\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} = \frac{a+b+c-d}{2} \quad (1) \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{MQN} - \widehat{MN}}{2} = \frac{a+d+c-b}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

طرفین دو رابطه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{a+b+c-d}{2} + \frac{a+d+c-b}{2} = \frac{2a+2c}{2} = a+c \quad (1)$$

$$75^\circ + 85^\circ = a+c \Rightarrow 160^\circ = a+c \quad (o/25)$$

$$\widehat{PAN} = \frac{\widehat{PN} + \widehat{MQ}}{2} = \frac{a+c}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ \quad (o/5)$$

$$\hat{\alpha} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \quad (o/25)$$

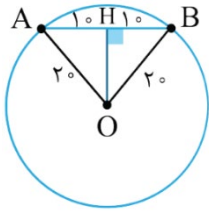
یادگیری بیشتر:

از برخورد وترها یا امتداد آن‌ها و یا مماس‌های رسم شده بر دایره، زوایایی ایجاد می‌شود که از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$\hat{M} = \frac{BT - AT}{2}$	$\hat{M} = \frac{BD - AC}{2}$	$\hat{M} = \frac{AC + BD}{2}$

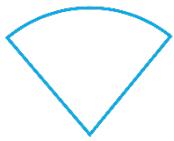


۴



$$\left. \begin{aligned} \widehat{OHB} : \widehat{OB^2} &= \widehat{BH^2} + \widehat{OH^2} \\ 400 &= 100 + \widehat{OH^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$300 = \widehat{OH^2} \Rightarrow OH = 10\sqrt{3} \quad (0/5)$$



$$S_1 = \frac{1}{6} \times \pi r^2 \quad (0/25)$$

$$= \frac{1}{6} \times \pi \times 400 = \frac{200\pi}{3} \quad (0/25)$$

مساحت $\widehat{OAB}$:

$$S_2 = \frac{1}{2} |OH| |AB| \quad (0/25)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 20 = 100\sqrt{3} \quad (0/5)$$

مساحت قطعه خواسته شده:

$$S = S_1 - S_2 \Rightarrow \frac{200\pi}{3} - 100\sqrt{3} \quad (0/75)$$

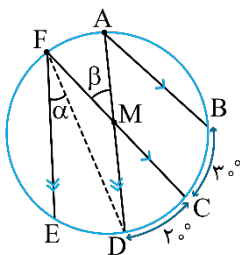
$\frac{360^\circ}{\alpha}$	$\frac{\pi r^2}{?}$
----------------------------	---------------------

یادگیری بیشتر:

مساحت قطاع با زاویه α و شعاع r از تناسب روبه‌رو به‌دست می‌آید:

برای به‌دست آوردن مساحت‌های قسمت‌های مطلوب سؤال کافی است از مساحت‌هایی که در ذهن داریم استفاده کنیم.

۳



$$\widehat{BC} = \widehat{AF} = \widehat{ED} = 30^\circ \quad (1/5)$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\widehat{ED}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \quad (0/5)$$

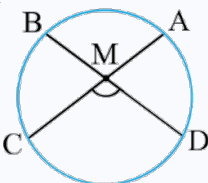
$$\widehat{\beta} = \frac{\widehat{AF} + \widehat{CD}}{2} = \frac{30^\circ + 20^\circ}{2} = 25^\circ \quad (1)$$

مصحح شو:

می‌دانیم کمان‌های محصور بین وترهای موازی باهم برابرند در نتیجه:

یادگیری بیشتر:

زاویه محصور بین دو وتر در دایره از رابطه زیر به‌دست می‌آید.



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

۵

مصحح شو:

می‌دانیم اگر کمان $\widehat{AB}$ ، 60° است، طول وتر AB برابر شعاع است. بنابراین: $R = 20$

(الف)

(ب) مساحت قطاع $\widehat{AOB}$:

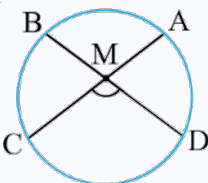
۶

مصحح شو:

می‌دانیم کمان‌های محصور بین وترهای موازی باهم برابرند در نتیجه:

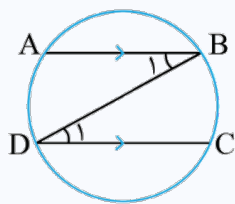
یادگیری بیشتر:

زاویه محصور بین دو وتر در دایره از رابطه زیر به‌دست می‌آید.



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در دایره باهم برابرند، زیرا:
از B به D وصل می‌کنیم.



$$AB \parallel CD \text{ و } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مخاطی } \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \text{مخاطی } \hat{D}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

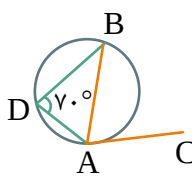
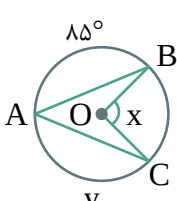
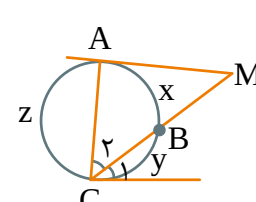
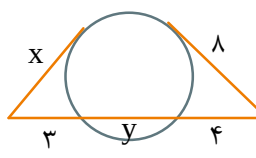
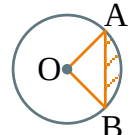
۲۰

موفق باشید



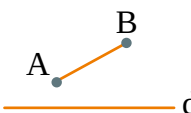


به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: هندسه ۲		تعداد صفحه: ۲	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۲/۱۸	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)				
۱	در جاهای خالی عبارت‌های مناسب قرار دهید. (الف) زاویه $\widehat{BAC}$ در شکل مقابل درجه است.  (ب) اگر در دو دایره $C(O, 3)$، $C'(O', 2)$ و $OO' = \sqrt{2}$ باشد می‌توان مماس مشترک بر دو دایره رسم کرد. (پ) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل هم‌رسی است. (ت) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن، برخورد آن منطبق می‌شود می‌نامند.				
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (الف) در شکل روبه‌رو، اگر $\widehat{x} = 150^\circ$ باشد، زاویه $y = 125^\circ$ است.  (ب) یک چندضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر نیمسازهای همه زوایای آن در یک نقطه هم‌رس باشند. (پ) در تبدیل بازتاب یک شکل نسبت به یک محور، همواره جهت شکل حفظ می‌شود. (ت) هر تبدیل طولی، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.				
۳	در شکل زیر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ است. زوایای $\widehat{M}$، $\widehat{C_1}$، $\widehat{C_2}$ را به‌دست آورید. 				
۴	در دو دایره به شعاع‌های R و R'، فاصله دو مرکز 8 و همواره $8 > R + R'$ است. اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی دو دایره $\sqrt{15}$ باشد، شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.				
۵	در شکل زیر، طول x چند واحد است؟ 				
۶	اگر طول وتر AB با شعاع دایره $C(O, 4)$ برابر باشد، مساحت ناحیه هاشورزده را به‌دست آورید. 				
۷	اگر a، b و c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC با اضلاع 5، 12 و 13 باشد: (الف) حاصل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ را به‌دست آورید. (ب) شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟				



به نام خدا

ساعات شروع:	ریاضی و فیزیک	رشته:	تعداد صفحه: ۲	سوالات آزمون نهایی درس: هندسه ۲
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:	تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۲/۱۸	دوره دوم متوسطه - یازدهم
گروه آموزشی ماز				
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی				
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره		
۸	جمله های زیر را کامل کنید و سپس هر مورد را اثبات کنید. الف) اگر چهارضلعی ABCD محاطی باشد، رابطه بین زاویه های آن عبارتست از ب) اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد، رابطه بین اضلاع آن با هم عبارتست از	۳		
۹	در حالت زیر، اگر بخواهیم بازتاب پاره خط AB نسبت به خط d را به دست آوریم، ثابت کنید بازتاب تبدیلی طولپاست. 	۲		
	موفق باشید.	۲۰		



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۲	رشته:	ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۲/۱۸
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	ساعت شروع:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره												
	مصحح شو: الف) 70° (۰/۵) $\widehat{AB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 140^\circ$ $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$ ب) ۲ (۰/۵) با توجه به اطلاعات داده شده، $R - R' < OO' < R + R'$ و دو دایره متقاطع هستند که دو مماس مشترک خارجی دارند. پ) نیمسازهای زوایای داخلی مثلث (۰/۵) (ت) نقطه ثابت تبدیل (۰/۵) زاویه مرکزی، محاطی و ظلی الف) سه زاویه مرکزی، محاطی و ظلی و اندازه‌های آنها از مباحث بسیار مهم پایه‌ای است که در زیر به آن اشاره شده است. زاویه ظلی $\hat{A} = \frac{\widehat{AEB}}{2}$ رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع مماس بر دایره و ضلع دیگر وتر دایره است. زاویه محاطی $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهای دایره هستند. زاویه مرکزی $\hat{O} = \widehat{AB}$ رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند. ب) وضعیت‌های دو دایره را در شکل‌های زیر می‌بینید که در حالت متخارج، دو دایره، ۲ مماس مشترک خارجی و ۲ مماس مشترک داخلی دارند. در حالت مماس بیرون و متقاطع دو مماس مشترک خارجی و در حالت مماس درون ۱ مماس مشترک خارجی دارند. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td></td> <td>$d > R + R'$</td> <td>دو دایره بیرون هم (متخارج)</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$d = R + R'$</td> <td>دو دایره مماس بیرون</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$R - R' < d < R + R'$</td> <td>دو دایره متقاطع</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$d = R - R'$</td> <td>دو دایره مماس درون</td> </tr> </tbody> </table>		$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)		$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون		$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع		$d = R - R' $	دو دایره مماس درون	۲
	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)												
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون												
	$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع												
	$d = R - R' $	دو دایره مماس درون												

	$d < R - R' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره های هم مرکز

مصحح شو:

الف) درست (۰/۵)

$$\widehat{BC} = 150^\circ \Rightarrow \hat{x} = 150^\circ \text{ زاویه مرکزی}$$

$$\widehat{AC} = 360^\circ - (150^\circ + 85^\circ) = 125^\circ$$

ب) نادرست (۰/۵)

یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های اضلاع آن در یک نقطه هم رس باشند.

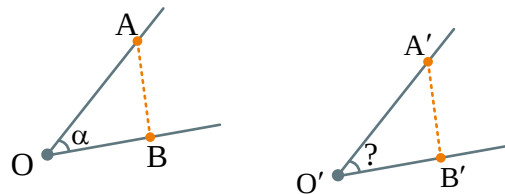
پ) نادرست (۰/۵)

تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند مگر در ۲ حالت:

(۱) خط موازی با محور بازتاب باشد.

(۲) خط عمود بر محور بازتاب باشد.

ت) درست (۰/۵)

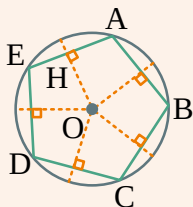


$$\begin{cases} T(A) = A' & OA = O'A' \\ T(O) = O' \Rightarrow OB = O'B' \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}' \\ T(B) = B' & AB = A'B' \end{cases}$$

ض ض ض

چندضلعی محاطی

چندضلعی را محاطی می گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که از همه رؤس آن بگذرد، در این صورت دایره را دایره محیطی آن چندضلعی می نامیم. به طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.



می دانیم برای اینکه دایره ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمودمنصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه را بهم وصل می کند، بنابراین:

یک چندضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رس باشند.

مصحح شو:

می دانیم مجموع زاویه های x , y و z باید 360° باشد.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = t$$

$$\Rightarrow x = 2t, y = 3t, z = 5t$$

$$2t + 3t + 5t = 360^\circ \Rightarrow 10t = 360^\circ \Rightarrow t = 36^\circ (0/25)$$

$$x = 72^\circ, y = 108^\circ, z = 180^\circ$$

(0/5) (0/5) (0/5)

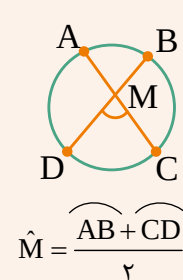
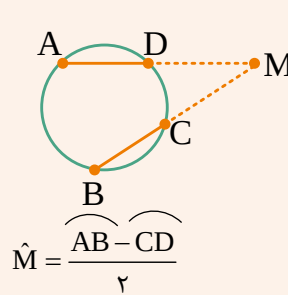
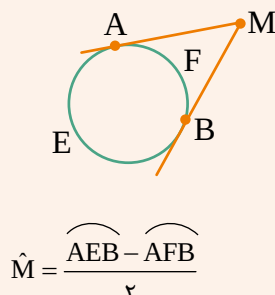
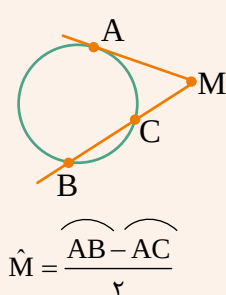
$$\hat{M} = \frac{z-x}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ (0/25)$$

۲.۵ $\hat{C}_1 = \frac{y}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ (0/25)$

$$\hat{C}_2 = \frac{x}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ (0/25)$$

۲۰ شو:

اگر دو وتر یکدیگر را در خارج و یا داخل دایره قطع کنند، از تقاطع آن‌ها، زاویه هایی به صورت زیر به دست می آید.



مصحح شو:

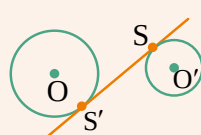
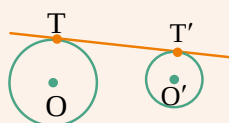
$$\sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{64 - (R + R')^2}$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{64 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R + R' = 7 \\ R - R' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 4 \\ R' = 3 \end{cases}$$

(0/5) (0/5)

۲۰ شو:



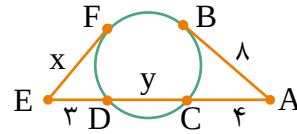
طول مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه $|TT'| = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

و طول مماس مشترک داخلی دو دایره از رابطه $|SS'| = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$ به دست می آید.

مصحح شو:

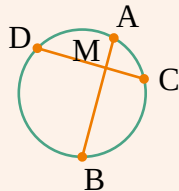
$$AB^2 = AC \times AD \Rightarrow 64 = 4(y + 4) \Rightarrow y = 12$$

$$EF^2 = ED \times EC \Rightarrow x^2 = 3(3 + 12) = 45 \Rightarrow x = 3\sqrt{5}$$

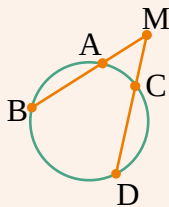


۲۰ شو:

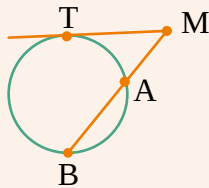
اگر دو وتر دایره، یکدیگر را در داخل و یا خارج از دایره قطع کنند، از تقاطع آنها، بین طولهای ایجاد شده روابط زیر برقرار است:



$$MA \times MB = MC \times MD$$



$$MA \times MB = MC \times MD$$



$$MT^2 = MA \times MB$$

مصحح شو:

$$AB = R = 4 \Rightarrow \triangle OAB \text{ متساوی الاضلاع}$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \quad (0.75)$$

$$S_{\text{شعاع}} = \frac{1}{6} (\pi R^2) = \frac{1}{6} \times \pi \times 16 = \frac{8}{3} \pi \quad (0.75)$$

$$S_{\text{هاشور خورده}} = \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} \quad (0.5)$$

۲۰ شو:

اگر طول وتری در دایره با شعاع دایره برابر باشد، کمان نظیر آن وتر ۶۰° است.

مصحح شو:

با توجه به طول اضلاع داده شده، مثلث قائم الزاویه است.

الف) $S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ (۰/۵)

$2P = 30 \Rightarrow P = 15$ (۰/۵)

$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ (۰/۵)

ب) $R = \frac{13}{2} = 6.5$ (۰/۵)

۲۰ شو:

اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث و R شعاع دایره محیطی مثلث باشد،
همواره:

۱) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

۲) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ (h_a, h_b, h_c ارتفاع‌های مثلث هستند)

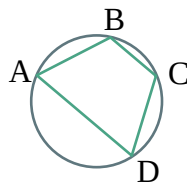
۳) اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، R (شعاع دایره محیطی) نصف وتر است.

۴) $r = \frac{S}{P}$ (S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث است)

مصحح شو:

الف) مجموع هر دو زاویه مقابل آن 180° است. (۰/۵)

اثبات:



۳
$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} & (۰/۲۵) \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

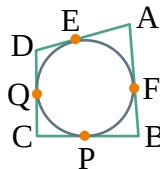
$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$
 (۰/۵)

اثبات:

ب) مجموع هر دو ضلع مقابل، با مجموع اضلاع دیگر برابر است. (۰/۵)

$AD + BC = AE + ED + BP + PC$ (۰/۵)

$$\frac{AF + DQ + BF + CQ}{2} = AB + CD$$
 (۰/۵)

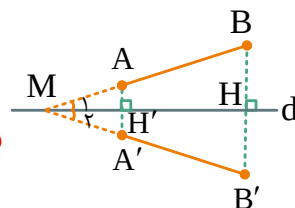


مصحح شو:

۲ امتداد AB ، خط d را در نقطه M قطع می‌کند، نقطه B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا B' به دست آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطه A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MAA' و MBB' متساوی‌الساقین هستند، زیرا: (۰/۲۵)



$$\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ, BH = B'H \Rightarrow BB' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MB = MB' \text{ (۱) (۰/۵)} \\ \hat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA' \text{ (۲) (۰/۵)} \end{cases}$$



از طرفی می دانیم که در مثلث متساوی الساقین، عمودمنصف d ، نیمساز زاویه M می باشد، پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و در نتیجه A' روی MB' قرار دارد. (۰/۵)

از طرفی، از موارد (۱) و (۲) داریم:

$$MB = MB', MA = MA' \Rightarrow MB - MA = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B' \text{ (۰/۲۵)}$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولپا می باشد.

۲۰

موفق باشید.